確率数理工学 (1)

情報学・工学・物理学など様々な場面で現れる
「確率」その数学的な基礎を学ぶ.
→ 統計・機械学習・量子力学・粒子の運動
などなど...
"確率"は必須項目

講義概要

1. 確率空間
2. 確率変数
   → 可測関数
3. 期待値と母関数
   → ルベーグ積分・モーメント母関数・特性関数
4. 確率不等式
   → データの平均が期待値のまわりにどれくらい集中するか?
5. 確率変数の収束
   → 法則収束・確率収束・概収束
6. 大数の法則と中心極限定理

7. 確率過程

→ ガウス過程・加法過程・マルコフ過程

8. マルコフ過程

→ 到達可能性・同値類・再帰性・定常分布

評価：中間レポート＋期末試験(予定)

参考書

- 佐藤坦（ヒロシ）『はじめての確率論 測度から確率へ』共立出版
- 舟木直久『確率論』朝倉書店
- 伊藤清『確率論』岩波書店（岩波基礎数学選書）
- Durrett "Probability: Theory and Examples". Cambridge university press.

  ↖ オンラインでpdf入手可

当面の目標：「確率」を定義する.

→ "σ-加法族" "確率測度" → "確率空間"

「サイコロをふる」といった1つ1つの試行の結果、
観測される事象の確率を定める。

- 試行 (trial)
- Ω：標本空間 (sample space) ← 試行の結果全体の集合
- $\omega \in \Omega$：標本点 (sample) ← 試行の結果

例 (サイコロ投げ)

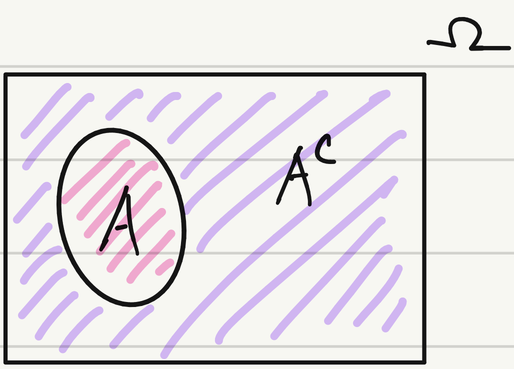
試行：サイコロをふる。

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (サイコロの目の全体)

$\omega \in \Omega$ ："2"等、サイコロの目

Def (事象)

- $A \subset \Omega$：事象 (event)
  ↑ 標本空間の部分集合
- $A^c := \Omega - A$：余事象
  $= \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$

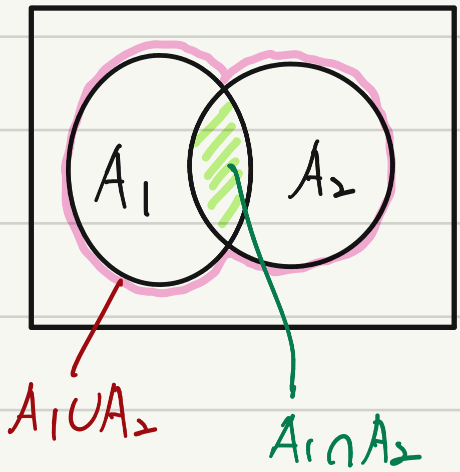


- $A_1 \cup A_2 := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_1 \text{ または } \omega \in A_2\}$

  和事象

- $A_1 \cap A_2 := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_1 \text{ かつ } \omega \in A_2\}$

  積事象



例

$A_1 = \{\text{偶数の目}\}$
$\quad = \{2, 4, 6\}$

$A_2 = \{3\text{の倍数の目}\}$
$\quad = \{3, 6\}$

$\Longrightarrow \quad A_1 \cap A_2 = \{6\}, \quad A_1 \cup A_2 = \{2, 3, 4, 6\}$

事象に「確率」を定めたい。

→ 標本空間Ωが有限集合なら難しくない。→ (サイコロ)

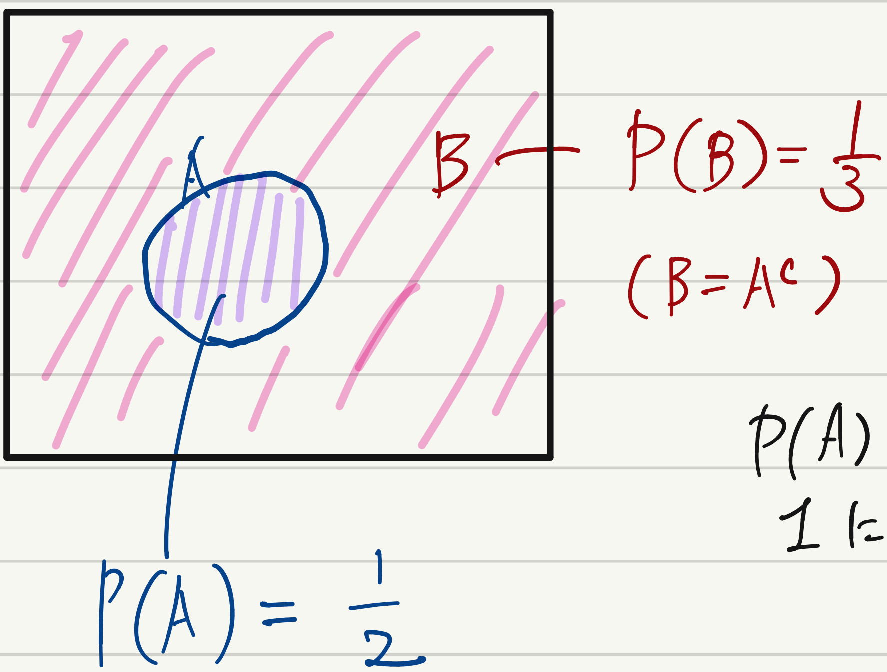
→ "連続","無限"も扱いたい。

下手にやると"矛盾"が起きることが知られている。
(事象をバラバラに分割して、それらを合体しても元の"大きさ"にならない) ← Banach-Tarski, ルベーグ非可測集合.

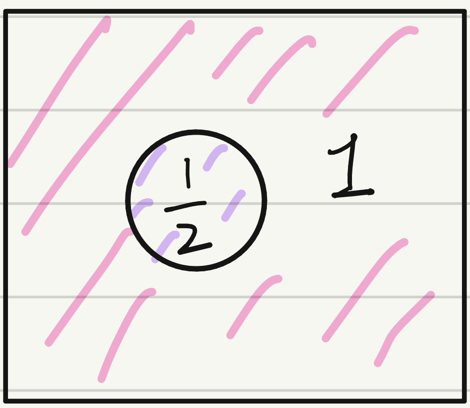
→ 確率を定義しても矛盾が生じない
体系を用意する.
この範囲の集合なら(可算)無限個の事象の
和や積を取っても大丈夫という"範囲"を定めたい.

→「σ-加法族」「可測空間」
「確率測度」

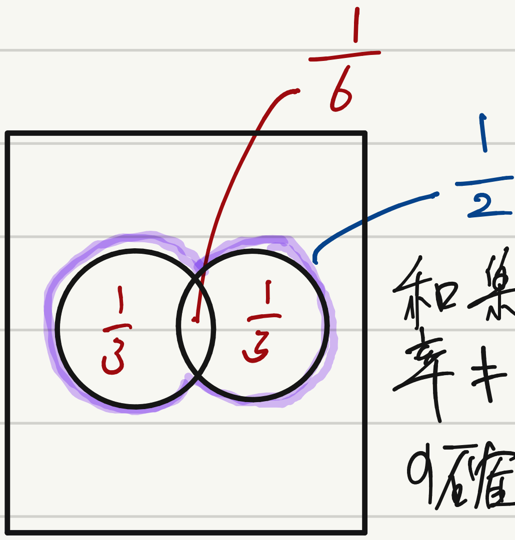
おきて欲しくないこと:



P(A)とP(B)足しても
1にならない.



和が
1になる.



和集合の確率≠部分の確率の和

Def (σ-加法族) 重要

Ω の部分集合族 $\mathcal{F}$ が σ-加法族

$\Longleftrightarrow$

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

☆ (3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ (可算無限個)

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \text{ で } \omega \in A_n\}$$

も $\mathcal{F}$ に含まれる. $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}\right)$

↑ σ-加法性 (完全加法性) と言う.

※ 非可算無限和は許さない.

(1): 標本空間全体には確率を定めたい.

(2): Aの確率が定まっていれば、

A^c の確率（Aが起きない確率）も定まってほしい.

(3): 確率の定まっている事象を可算無限個寄せ集めたものにも確率は定まっていてほしい.

⇒ これのおかげで極限操作ができる.

⇝ 離散と連続をつなげられる.

⇝ 面積の和で積分を定義できる.

（細かく区切って足し合わせることが可能なと
できる）

上の性質をみたす $\mathcal{F}$ は全て σ-加法族を名乗る資格がある.

注: $A \in \mathcal{F}$ かつ $B \subset A$ （BはAの部分集合）であっても、

$B \in \mathcal{F}$ とは限らない.

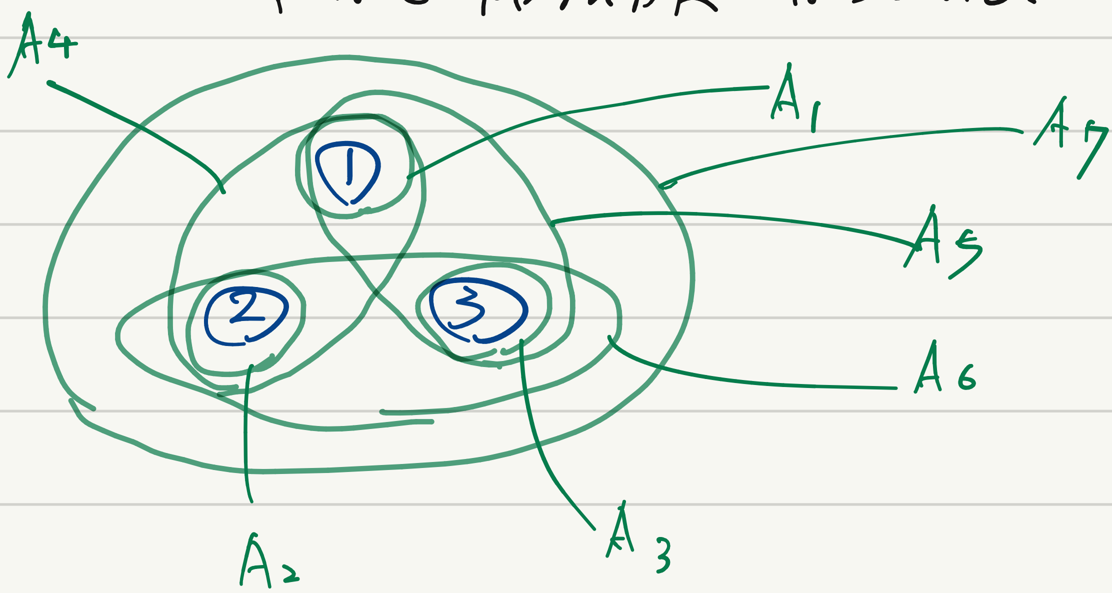
Ωとその上のσ-加法族$\mathcal{F}$の組$(\Omega, \mathcal{F})$を
可測空間と言う
重要!

この可測空間に"確率"を定める.

例 $\Omega = \{1, 2, 3\}$
$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$,
$A_4 = \{1, 2\}$, $A_5 = \{1, 3\}$, $A_6 = \{2, 3\}$,
$A_7 = \{1, 2, 3\}$

集合族: 集合の集合であったことを思い出す.

$\Rightarrow \mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, \phi\}$
とおけば,
空集合
$\mathcal{F}$はσ-加法族になっている.



//

☆ $\mathcal{F} = \{A_1, A_6, A_7, \phi\}$ もσ-加法族になっている.
("σ-加法族"は一意的に定まるものではない.)

Def (確率測度)

$P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度

$\mathcal{F}$の元をうけとって $\mathbb{R}$の値を返す関数であるという意味

つまり，$A \in \mathcal{F}$ に対し，$P(A) = 0.4$ とかの値が決まっている。

集合関数

$\Longleftrightarrow$

(1) $\forall A \in \mathcal{F}$ で $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が互いに排反

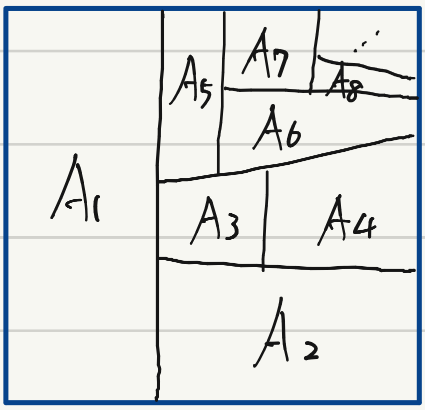
可算無限個

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

//

(☆互いに排反 $\Leftrightarrow A_i \cap A_j = \phi \quad (\forall i \neq j)$)

(3) の性質を σ-加法性（完全加法性）と呼ぶ。



それぞれの確率の可算和が全体の確率に一致する。

※ バラバラにしてそれぞれの確率を測り、それを足し合わせたものが、元の全体の確率となる。

$\Longrightarrow$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ として変なものを持ってきると、これが成り立たない。

(非可算無限和も許すと、"変なもの"が出てしまう)

$\Longrightarrow$ σ-加法性が成り立つ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に制限

後のBorel集合族はその一例である。

例: 線分

$\Omega = [0,1]$, P: Ω 上の一様分布

$\mathcal{F} = \{ B \cap [0,1] \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

とする。

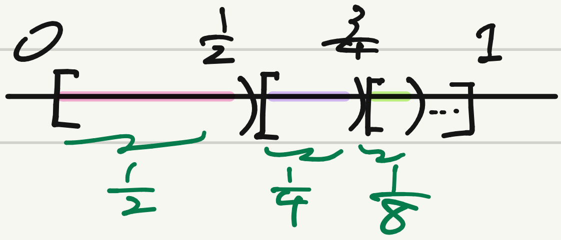
$A_n = [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n})$ ← ($A_n \in \mathcal{F}$ はすぐ示せる)

を考える。

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left([0,\tfrac{1}{2}) \cup [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}) \cup \cdots\right)$$
$$= P([0,1)) = 1$$

はじの確率 $= 0$ なので $P([0,1]) = P([0,1)) = 1$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$



可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ とその上の確率測度 P の組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間と言う

記法の補足：

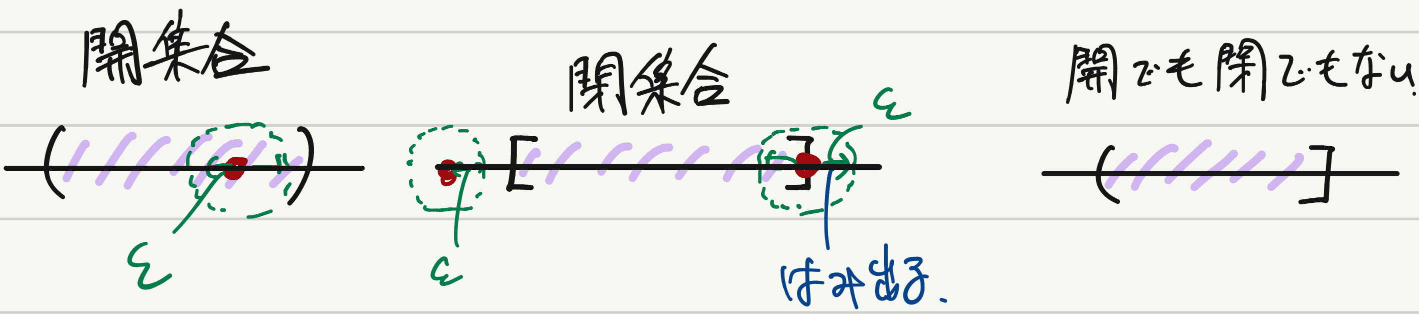
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid$ あるnで $\omega \in A_n\}$
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid$ 全てのnで $\omega \in A_n\}$
- $A \subset B \iff \forall \omega \in A$ が $\omega \in B$ をみたす.
- ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の開集合：

  $A \subset \mathbb{R}^d$ が開集合

  $\iff \forall x \in A$ に対し, $^\exists \varepsilon > 0$ で.

  $B_\varepsilon(x) = \{x' \in \mathbb{R}^d \mid \|x' - x\| \leq \varepsilon\} \subset A$

(Aが閉集合 $\iff$ A^cが開集合)



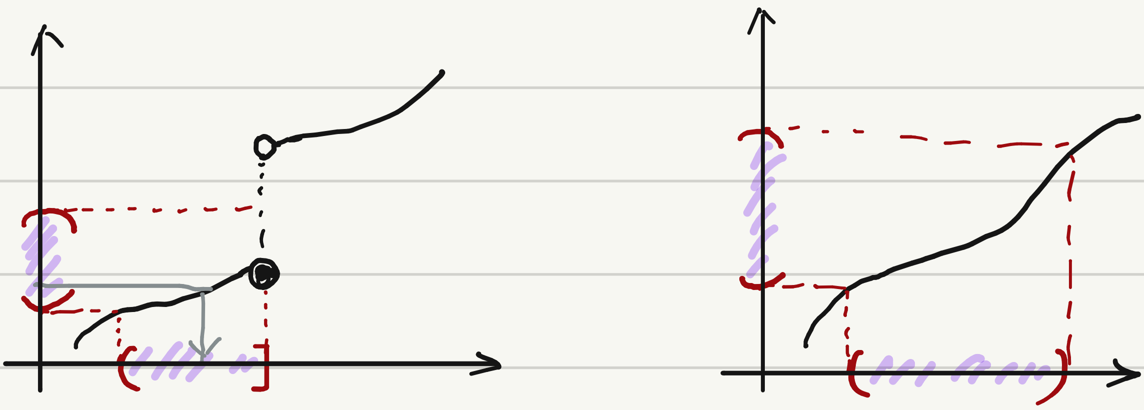
・連続関数

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が連続

$\iff$ $^\forall A \subset \mathbb{R}$：開集合に対し、

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \in A\}$$

が開集合。



より一般に、集合 X に開集合系 $\mathcal{O}$ が付与された空間 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間と言う。$\mathcal{O}$ の元を開集合と呼ぶ。

なお、$\mathcal{O}$ が以下の性質をみたすとき、$\mathcal{O}$ を位相（開集合系）と呼ぶ：

1. $\phi, X \in \mathcal{O}$
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
3. 任意の $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$ に対し $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{O}$ ← 非可算個でもOK

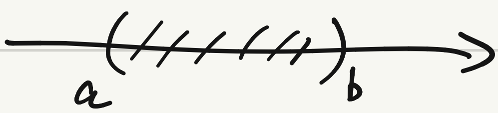
σ-加法族の中でも <u>Borel集合族</u> は重要である.

Def (Borel集合族)
$\mathbb{R}$上のBorel集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は
$\mathbb{R}$の任意の開集合を含む最小のσ-加法族である.

Borel集合族の元をBorel集合と言う. //

[参考] 一般の位相空間 S に対しても
同様に Borel集合族 $\mathcal{B}(S)$ は
S の任意の開集合を含む最小のσ-加法族
として定義される.

Borel集合族のモチベーション:



こんな開区間 (a,b) の面積(確率)は定まっていてほしい.

定義より $\forall a<b$ に対し. $(a,b)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ である.

$\Longrightarrow$ 実は $\{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$ を含む最小のσ-加法族が $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ である.

○○を含む最小のσ-加法族とは？

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$: σ-加法族 が、ともに任意の開集合を含むとする。

（つまり、$A \subset \mathbb{R}$ が開集合なら、$A \in \mathcal{F}_1$, $A \in \mathcal{F}_2$ である）

このとき、

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{ A \subset \mathbb{R} \mid A \in \mathcal{F}_1 \text{ かつ } A \in \mathcal{F}_2 \}$$

注！ $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{ A \cap B \mid A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2 \}$ ではないことに注意！

も任意の開集合を含むことは $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ が開集合を全て含むことからわかる。

さらに、$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ はσ-加法族にもなっている。

(∵) (1) $\Omega \in \mathcal{F}_1$, $\Omega \in \mathcal{F}_2$ より $\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

(2) $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ なら $A^c \in \mathcal{F}_1$, $A^c \in \mathcal{F}_2$ であるので、$A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ である。

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ なら、

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_2$ でもあるので、

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ でもある。

//

$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ は $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ の部分集合なので、$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ より
"小さい" と言える.
なので、開集合を全て含む σ-加法族を全て
集めてきて、それらの共通部分をとれば、
"最小の σ-加法族" を構成できる.

Thm

σ-加法族のインデックス

$(\mathcal{F}_u)_{u \in \mathcal{U}}$: σ-加法族の族 (非可算濃度もゆるす)

$\Rightarrow \bigcap_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}$ は σ-加法族. //

証明は前ページと同様なので省略 ← チェックせよ.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \bigcap \{ \mathcal{F}' \mid \mathcal{F}' \text{は任意の開集合を含む σ-加法族} \}$$

構成のしかたから、
(1) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は σ-加法族 ← 上のThmより.
(2) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は任意の開集合を含む

さらに、$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ より小さくてそのような条件をみたす
σ-加法族は存在しない.
← これも $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の構成からわかる
$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$ は
任意の開集合を含む σ-加法族の中で最も"小さい".

[確率測度の基本公式]

(1) $P(\phi)=0$ (空集合の確率は0)

(2) $P(A^c)=1-P(A)$

(3) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1-P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)$

(Anらは互いに排反とは限らない)

(4) $B_1, B_2, \ldots$ が互いに排反かつ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\Omega$$

ならば $^{\forall}A\in\mathcal{F}$ で $P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A\cap B_n)$

(5) $A_n\in\mathcal{F}$ $(n=1,2,\ldots)$: 互いに排反とは限らない

$$\Longrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

(劣加法性)

(6) 和の公式:

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$$

(7) その一般化

$$S_m=\sum_{n_1<\cdots<n_m}P(A_{n_1}\cap\cdots\cap A_{n_m})$$

(7) その一般化

$$S_m = \sum_{n_1<\cdots<n_m} P(\underbrace{A_{n_1}\cap\cdots\cap A_{n_m}}_{m\text{個の積集合}})$$

とおくと、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m-1} S_m$$

(包除原理)

(8) 確率の連続性Ⅰ:

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$: 事象の列 ($A_n \in \mathcal{F}$とする)

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと、 ($A \in \mathcal{F}$に注意)

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

(9) 確率の連続性Ⅱ:

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$

$$\Longrightarrow \quad P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

要は、

$$P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$$

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "n\to\infty"] \arrow[d, "P"'] & A \arrow[d] \\
P(A_n) \arrow[r, "n\to\infty"'] & P(A)
\end{tikzcd}$$

※この2つは超重要!

(証明)

(1). $1 = P(\Omega) = P(\underbrace{\Omega \cup \phi \cup \phi \cup \phi \cup \cdots}_{\text{互いに排反}}) = \underbrace{P(\Omega)}_{\shortparallel \atop 1} + \underbrace{P(\phi) + P(\phi) + \cdots}_{\shortparallel \atop 0}$

($\Omega \cap \phi = \phi$, $\phi \cap \phi = \phi$)

$1 \Longrightarrow 0$ でなくてはいけない.

よって ~~$0 \leq P(\phi) \leq 1$ でもあるので~~ ∴ $P(\phi) = 0$ である.

(2) $1 = P(\Omega) = P(\underbrace{A \cup A^c \cup \phi \cup \phi \cup \cdots}_{\text{互いに排反}}) = P(A) + P(A^c) + \underbrace{P(\phi) + \cdots}_{\shortparallel \atop 0}$ (∵(1)より)

$\Longrightarrow \quad 1 = P(A) + P(A^c)$

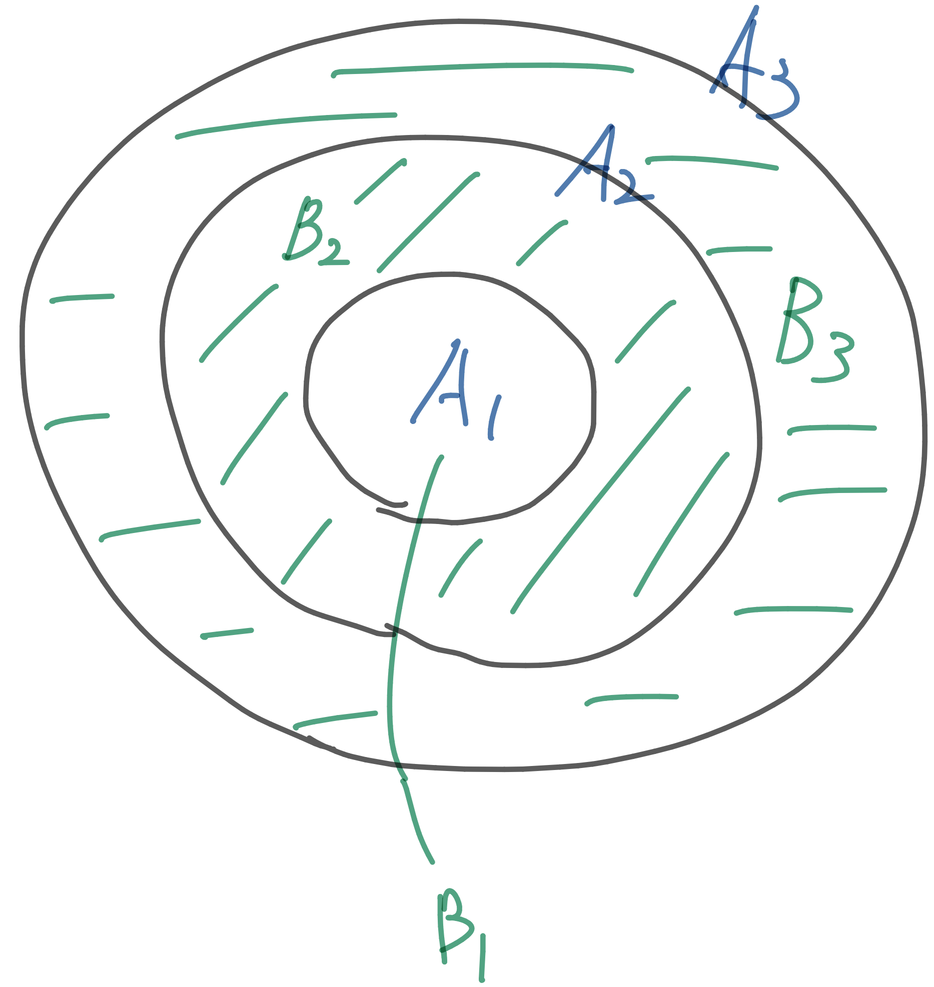
(3) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) \underset{\uparrow}{=} 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$

De Morgan の法則
(自分で示してみよ).

(8). $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, $B_n = A_n - A_{n-1}$ とすると.

$(B_n)_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反.

しかも. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$



よって. σ-加法性より

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} P(B_n)$$

$$= \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} P(A_m)$$

//